2003年 東大数学 文系 第1問 ①

$f(x)=ax^2+bx+c$ ◀不明量が3文字

(A)
$$\begin{cases} f(-1)=-1 & ① \\ f(1)=1 & ② \end{cases}$$
◀等式が2本分

⟹ 不明量が $3-2=1$ 文字分残る。
a, b, c のどれを残すかは、後で判断

1文字残す

$f'(1)\leqq 6$ ③ ◀残った1文字の範囲がわかる

(B) $-1\leqq x\leqq 1$ を満たすすべての x に対し
$f(x)\leqq 3x^2-1$ ④

「すべて、常に、」＋不等式 ⟹ 最大最小問題

これも、残った1文字の範囲がわかる

$I=\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx$ のとりうる値の範囲を求めよ ⑤

x の積分なので、x は残らない。
③や④で残した1文字の範囲を求めているので、
それを利用して I の範囲を求める。

①より $f(-1)=-1$
$\iff a-b+c=-1$ …①'

②より $f(1)=1$
$\iff a+b+c=1$ …②'

③より $f'(x)=2ax+b$ なので
$2a+b\leqq 6$ …③'

④より $f(x)\leqq 3x^2-1 \iff 3x^2-1-ax^2-bx-c\geqq 0$
$\iff (3-a)x^2-bx-c-1\geqq 0$
$g(x)=(3-a)x^2-bx-c-1$ とすると
$-1\leqq x\leqq 1$ における $g(x)$ の最小値が0以上であればよい。④'

3−a の符号がわからないと、軸の位置や凸性がわからないので、保留

⑤より $I=\int_{-1}^{1}(2ax+b)^2dx$

$=\int_{-1}^{1}(4a^2x^2+4abx+b^2)dx$

$=2\int_{0}^{1}(4a^2x^2+b^2)dx$

$=2\left[\frac{4}{3}a^2x^3+b^2x\right]_0^1$

$=\frac{8}{3}a^2+2b^2$ …⑤'

偶関数、奇関数の性質（東大で頻出）

a と b が残っているので、①と②から c を消去することは確定。

①'−②'より $b=1$ …①'' ◀ b が判明したので、残す文字は a で確定

①'+②'より $a+c=0$ ∴ $c=-a$ …②''

③'より $2a+1\leqq 6$ $a\leqq \frac{5}{2}$ …③''

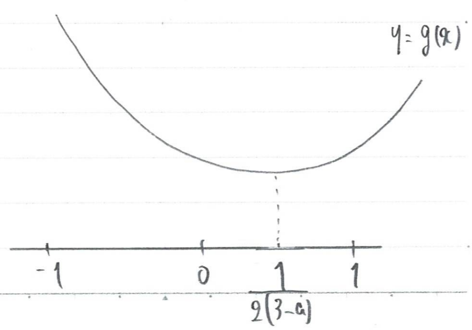
④'より $g(x)=(3-a)x^2-x+a-1$ であるが、
③''の $a\leqq\frac{5}{2}$ より $3-a\geqq\frac{1}{2}$ なので、
$g(x)$ は下に凸である。

$g(x)=(3-a)\left\{x-\frac{1}{2(3-a)}\right\}^2-\frac{1}{4(3-a)}+a-1$

より軸は $x=\frac{1}{2(3-a)}$ であるが、

③'' $a\leqq\frac{5}{2}$ より $0<\frac{1}{2(3-a)}\leqq 1$ である。

よって $g(x)=0$ の判別式 $\leqq 0$ となればよい。



2003年　東大数学　文系第1問②

$g(x)=0$ の判別式をDとすると

$$D=(-1)^2-4(3-a)(a-1)\leqq 0$$

$$4a^2-16a+13\leqq 0$$

$$\frac{4-\sqrt{3}}{2}\leqq a\leqq\frac{4+\sqrt{3}}{2}\quad\cdots④''$$

③''と④''より　aの範囲は $\underbrace{\frac{4-\sqrt{3}}{2}\leqq a\leqq\frac{5}{2}}_{\text{最終的なaの範囲.}}\quad\cdots(※)$

⑤'に①''を代入して

$$I=\frac{8}{3}a^2+2$$

(※)より　$\left(\frac{4-\sqrt{3}}{2}\right)^2\leqq a^2\leqq\left(\frac{5}{2}\right)^2$　$0<\frac{4-\sqrt{3}}{2}$ なので　2乗するだけ

$$\frac{19-8\sqrt{3}}{4}\leqq a^2\leqq\frac{25}{4}$$ なので

$$\frac{8}{3}\cdot\frac{19-8\sqrt{3}}{4}+2\leqq I=\frac{8}{3}a^2+2\leqq\frac{8}{3}\times\frac{25}{4}+2$$

$$\therefore\ \frac{44-16\sqrt{3}}{3}\leqq I\leqq\frac{56}{3}$$

//